

无穷域问题的弱形式求积元分析

袁 帅, 钟宏志

(清华大学 土木工程系, 北京 100084)

摘 要: 岩土工程中经常会遇到无穷域问题, 而采用无限单元可以实现对其有效地模拟。弱形式求积元法是一个有效的数值工具, 它常通过提高积分阶次来提高计算精度。建立了无限弱形式求积单元并被应用于求解岩土工程中的无穷域问题, 该单元基于坐标映射, 将无穷域变换到标准域, 在标准域上进行数值积分和数值微分, 保留了传统弱形式求积元的积分点坐标和权系数。求解了瞬态渗流、固结和静力分析等数值算例, 并与解析解或截断方法进行了对比。结果表明: 基于坐标映射的无限弱形式求积单元使用简单, 可以模拟各种类型的无穷域问题, 仅需要将感兴趣的范围进行有限域划分并通过提高积分阶次来减小对极点位置的依赖, 极大地节省了计算资源, 提高了计算精度。

关 键 词: 无限弱形式求积单元; 无穷域; 静力分析; 渗流; 固结; 坐标映射

中图分类号: TU 43

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598(2016)04-1187-09

Analysis of unbounded domain problems by the weak form quadrature element method

YUAN Shuai, ZHONG Hong-zhi

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Unbounded domain problems are frequently encountered in geotechnical engineering and infinite elements are often used effectively for simulation. The weak form quadrature element method is an effective numerical tool in which the computational accuracy is often improved through increasing the order of integration. An infinite weak form quadrature element is developed and applied to the analysis of unbounded domain problems in geotechnical engineering. Based on coordinate transformation, an unbounded domain is mapped onto a standard region where numerical integration and numerical differentiation are conducted and the conventional numerical integration points and weights in the weak form quadrature element method are retained. Numerical examples in the areas of transient seepage, consolidation and elastostatic analysis are given and the results are compared with analytical solutions or those of other numerical methods. It is shown that the infinite weak form quadrature element is simple and applicable to solution of various unbounded domain problems, while conventional elements are used during discretization of the domain of interest. In addition, the dependence on the pole of coordinate transformation can be alleviated considerably with the increase of the integration order of the element. Consequently, computational resources are reduced significantly and accuracy of results is enhanced.

Keywords: infinite weak form quadrature element; unbounded domain; static analysis; seepage; consolidation; coordinate transformation

1 引 言

岩土工程中经常会遇到无穷域问题, 如土与结构相互作用、地下开挖、地基沉降等。在此类问题中, 很难找到合适的边界并施加相应的边界条件。在实际工程中经常采取截断方法, 人为截取一定的范围, 并在边界上人为指定边界条件。为了降低人工边界条件对计算结果的影响, 通常将计算范围取

得很大, 但较大的计算模型具有更多的自由度, 使得计算规模和时间显著增长。使用无限单元则可以很好地解决这个问题, 自从 Ungless^[1]和 Bettess^[2]引入无限单元的概念以来, 学者们对其进行了大量的研究, 其中大部分是基于有限元法^[3-16], 同时也有一些边界元法的研究^[17-18]。无限单元已经在很多领域得到了广泛的应用。Houmat 用无限单元进行了平面应变和轴对称条件下半空间体在均布力作用下

收稿日期: 2014-07-14

基金项目: 国家自然科学基金(No. 51178247)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (NSFC) (51178247).

第一作者简介: 袁帅, 男, 1984 年生, 博士研究生, 主要从事土力学数值方法方面的研究工作。E-mail: yuan_shuai@126.com

的静力分析^[11]; Honjo^[6]和 Zhao^[7]等分别求解了无穷域瞬态渗流问题; Simoni 等^[5]将无限单元用于固结分析, 并与解析解进行了对比; 另外在波动^[15]、土与结构相互作用^[14]等领域也有相应的应用。赵崇斌等^[19]用无限单元来模拟半无限平面的弹性地基; 燕柳斌^[20]将无限单元与有限单元相结合, 对重力坝基础进行了模拟; 李晓龙等^[21]将自然元与无限单元相结合对均匀应力状态下深埋圆形隧洞进行了黏弹性分析; 宿金成等^[22]提出一种等效动力无限单元, 并将其用于模拟无限土体的波动问题; 韩绪等^[23]将无限单元与有限单元耦合对地下工程中的无限地基进行了静力分析。

建立无限单元主要有两种方式, 第 1 种是采用在无穷方向上衰减的形函数, 该方式需要对半无穷域进行数值积分; 第 2 种则采用坐标映射, 将物理上的无穷域转换到标准域, 保留了传统单元的形函数, 积分点和权系数, 使用起来比较简单, 比第一种方式更受欢迎。但使用坐标映射无限单元时, 只有选择合适的极点位置, 才能得到合理的模拟结果。无限单元的一个主要缺点在于, 通常情况一种无限单元只适用于一种衰减类型的问题, 只有当问题解的分布已知时, 无限单元才能达到最佳的效果^[8, 11]。而使用高阶单元则可以解决这个问题, Koh^[8]和 Houmat^[11]等分别建立了倒数衰减形式的 p 型无限单元, 通过提高单元阶次, 可以模拟各种衰减形式。但 p 型单元当阶次较高时, 刚度矩阵条件数增加很快, 求解时间也会增加很多, 计算效率严重下降^[24]。

弱形式求积元法基于问题弱形式描述, 对问题泛函进行数值积分和微分, 具有全域近似的性质, 只需较少的单元, 并且可以通过提高单元的阶次来提高结果的计算精度, 无需重新划分网格, 前后处理比较简单。本文基于 Marques 等^[25]提出的坐标映射函数, 建立了无限求积单元, 该单元可以通过提高近似阶次来模拟各类无穷域问题, 并且单元的未知量是具有实际物理意义的节点变量。将其应用于模拟各类岩土工程问题, 分别求解了无穷域上的瞬态渗流、固结和静力分析等数值算例, 并与解析解或其他方法进行了对比, 对极点位置的影响进行了讨论。

2 坐标映射

首先介绍一维坐标映射函数, 图 1 给出的是一维条件下从物理域到标准域的坐标变换, 图中整体坐标为 $x = x_1, x_2, x_3 (x_3 = \infty)$ 的 3 个点对应于局部坐标下 $\xi = -1, 0, 1$ 的 3 个点。其坐标变换为

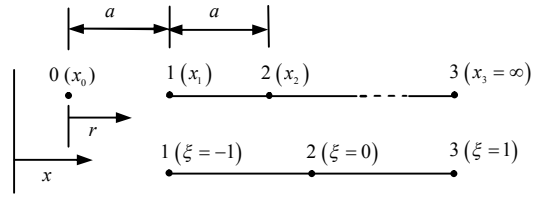


图 1 一维条件下无穷域到标准域的坐标映射

Fig.1 One-dimensional mapping of unbounded domain onto standard region

$$x = \sum_{i=1}^2 M_i(\xi) x_i \quad (1)$$

$$M_1(\xi) = \frac{-2\xi}{1-\xi}, \quad M_2(\xi) = \frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad \text{正无穷方向} \quad (2)$$

$$M_1(\xi) = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad M_2(\xi) = \frac{2\xi}{1+\xi}, \quad \text{负无穷方向} \quad (3)$$

式中: M_1 、 M_2 为坐标映射函数。物理域上的 0 点 ($x = x_0$) 称为坐标变换的极点, 它的位置由两点的位置决定, 即

$$x_0 = 2x_1 - x_2 \quad (4)$$

由式 (1), 局部坐标可以表示为

$$\xi = 1 - \frac{2a}{x - x_0} = 1 - \frac{2a}{r} \quad (5)$$

式中: a 为极点到 1 点的距离; r 为任意点到极点的距离。设标准域上插值得到的某一多项式函数分布为

$$f(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots \quad (6)$$

将式 (5) 带入式 (6), 则该函数在物理域上的分布为

$$f(r) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{r} + \beta_2 \frac{1}{r^2} + \dots \quad (7)$$

可见, 该函数以 r 的倒数衰减, 所以极点的位置对无限单元有重要的影响。二维和三维坐标映射函数可以由各个方向的一维坐标映射函数乘积得到。图 2 所示为二维坐标映射, 其中 x 正向为无穷方向, y 为有限方向, 映射函数为

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1(\xi, \eta) &= M_1(\xi) N_1(\eta) \\ \bar{M}_2(\xi, \eta) &= M_1(\xi) N_2(\eta) \\ \bar{M}_3(\xi, \eta) &= M_2(\xi) N_1(\eta) \\ \bar{M}_4(\xi, \eta) &= M_2(\xi) N_2(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1(\eta) &= \frac{1-\eta}{2} \\ N_2(\eta) &= \frac{1+\eta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: $\bar{M}_i$ 为第 i 个点的二维坐标映射函数; η 为竖向局部坐标; N_1, N_2 为有限方向上的一维坐标映射函数。两个方向均为无穷方向的坐标映射, 可以由同样的方法得到。

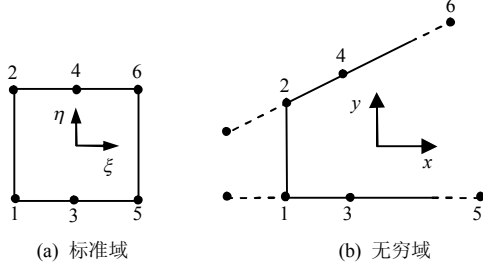


图2 二维条件下无穷域到标准域的坐标映射
Fig.2 Two-dimensional mapping of an unbounded domain onto a standard region

3 无限求积单元

转换到标准域以后, 就可以应用弱形式求积元法的步骤来建立无限求积单元, 本节以二维静力分析为例, 介绍无限求积单元的推导过程。关于无穷域渗流和固结分析的无限求积元列式, 可以类似得到。另外, 由于在弱形式求积元法中需要在边界上进行积分, 而在无穷边界上雅克比矩阵行列式为无穷大, 因此, 本节假定无穷边界上未知量衰减到 0, 关于非 0 边界条件的处理, 参见文献[5]。

单元内的应变能为

$$U^e = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} W_i W_j \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^T \mathbf{E}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} |\mathbf{J}|_{ij} \quad (10)$$

式中: $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变; $\mathbf{E}$ 为弹性矩阵; $|\mathbf{J}|$ 为雅克比行列式; W_i, W_j 为两个坐标轴方向的积分权系数; N_ξ, N_η 为两个坐标轴方向的积分点个数。由于假定无穷边界上变量值为 0, 因此, 积分不包括在无穷边界上的积分 (例如 $\xi=1$ 面, 对于 x 正方向为无穷方向的情况)。定义 u, v 为坐标轴方向的位移分量并引入名义应变 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, 则应变向量可以表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}^T, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{D}$ 为变换矩阵; J_{ij} 为雅克比矩阵分量。对积分点处导数进行微分求积近似, 则积分点 (i, j) 上的应变向量可以由节点位移向量 $\mathbf{d}^e$ 表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{D}_{ij} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} =$$

$$\mathbf{D}_{ij} \left[\sum_{k=1}^{N_\xi} C_{ik}^\xi u_{kj} \sum_{k=1}^{N_\eta} C_{jk}^\eta u_{ik} \sum_{k=1}^{N_\xi} C_{ik}^\xi v_{kj} \sum_{k=1}^{N_\eta} C_{jk}^\eta v_{ik} \right]^T = \mathbf{B}_{ij} \mathbf{d}^e \quad (14)$$

式中: $\mathbf{B}$ 为应变矩阵。将式 (14) 代入式 (10) 得

$$U^e = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e \quad (15)$$

$$\mathbf{K}^e = \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} W_i W_j \mathbf{B}_{ij}^T \mathbf{E}_{ij} \mathbf{B}_{ij} |\mathbf{J}|_{ij} \quad (16)$$

式中: $\mathbf{K}^e$ 为单元刚度矩阵。设外力势为

$$V^e = -\mathbf{d}^{eT} \mathbf{F}^e \quad (17)$$

式中: $\mathbf{F}^e$ 为单元节点力向量。则系统总势能为

$$\Pi = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\frac{1}{2} \mathbf{d}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e - \mathbf{d}^{eT} \mathbf{F}^e \right) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{F} \quad (18)$$

式中: N_e 为单元个数; $\mathbf{K}$ 为整体刚度矩阵; $\mathbf{d}$ 为整体节点位移向量。由驻值条件 $\delta \Pi = 0$ 得到最终代数方程组为

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (19)$$

然后引入边界条件, 就可以求解未知变量。

4 数值算例

4.1 一维瞬态渗流

图3所示为一维半无限长地下含水层, 含水层的左侧 $x=0$ 处总水头固定为 $h=h_0$ 。初始时刻其他各点总水头均为 0, 材料参数取为: 渗透系数 $k=2 \times 10^{-6}$ m/d, 单位储水量 $S_S=10^{-6}$ m⁻¹, $h_0=1$ m。取一个求积元单元和一个无限求积单元来求解该问题, 其中, 求积元单元的长度为 40 m, 求解域的总长度为 $L=80$ m, 即坐标变换的极点取在坐标原点。两个单元的竖向取 2 个积分点, 水平向求积元单元和无限求积单元分别取 7 和 5 个积分点。图4所示为 4 个点 ($x=10, 20, 30, 40$ m) 处总水头随时间的变化, 并与文献[26]中的解析解做了对比。可见, 求积元单元-无限求积单元的计算结果与解析解符合得很好。

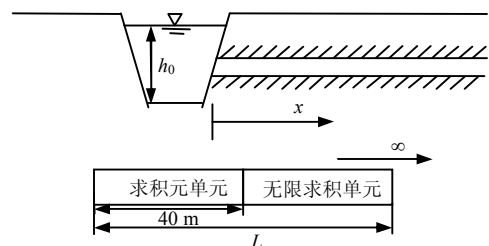


图3 一维瞬态渗流

Fig.3 One-dimensional transient seepage

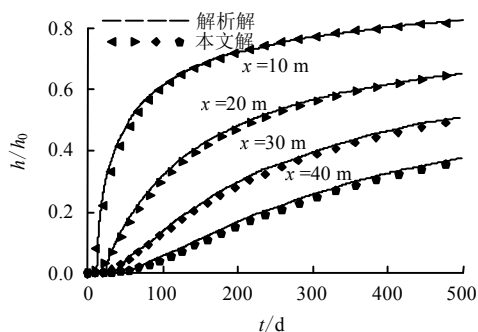


图4 不同点处总水头随时间的变化

Fig.4 Variations of total hydraulic head versus time at different positions

为了研究极点位置的影响,分别计算了 $x=30$ 、 40 m两点处在 300 d时总水头随模型长度 L 的变化,其中无限求积单元水平方向积分点分别取 $N=2$ 、 3 、 5 。结果如图5所示,图中采用收敛解作为对比,收敛解无限求积单元水平方向上取 21 个积分点,当模型总长度变化时, $x=30$ 、 40 m两点处总水头的第5位有效数字不发生变化。从图中可以看出,当积分点 $N=2$ 时,极点的位置对结果有着很明显的影

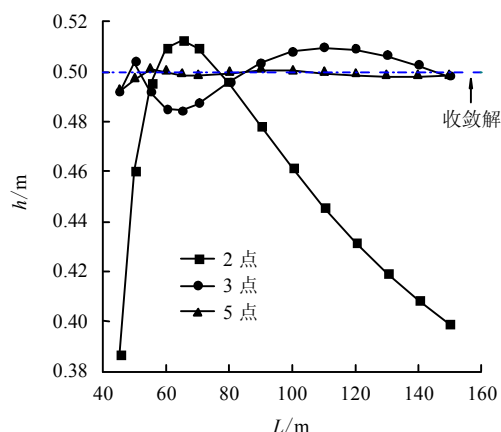
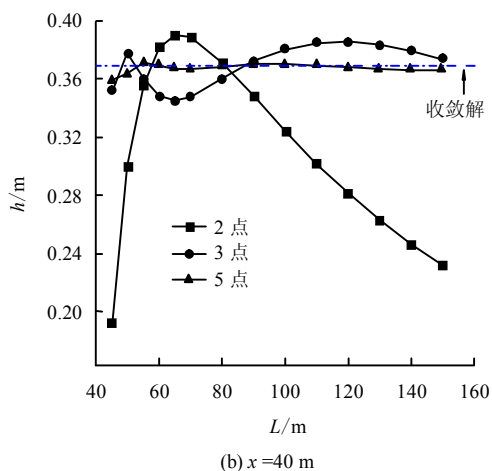
(a) $x=30$ m(b) $x=40$ m

图5 极点位置对水头结果的影响

Fig.5 Influence of pole position of coordinate transformation on hydraulic head

着单元阶数的增加,极点的影响逐渐减弱;当积分点数增加到 5 时,不同极点位置对应结果的差别已经很小。另外,当极点取在坐标原点,即衰减中心时($L=80$ m)不同积分点的结果与收敛解都比较接近,因此,极点宜取在问题的衰减中心。

4.2 无穷域静力分析

本算例研究图6(a)所示的平面应变问题,水平方向上无限大弹性体放置于刚性平面上,受宽度为 2 m的条形载荷作用,其大小为 10 kPa,弹性体的弹性模量 $E=10$ MPa,泊松比为 0 。利用对称性,取区域的 $1/2$,采用两种划分模型进行分析。

第1种模型中,区域分为两个求积单元(见图6(a)),第1个单元为常规求积单元(有限域),取 5×5 个积分点,第2个为无限求积单元(无限域),竖直方向上取 5 个积分点,水平方向上分别取 2 、 3 、 5 个积分点。同时使用ABAQUS计算此问题,网格划分见图6(b),有限域使用平面应变单元CPE4,使用无限单元CINPE4来模拟无穷域,无限单元和无限求积单元的水平方向长度为 L 。计算了 L 取不同值时载荷作用中心点处($x=0$ m)和载荷作用边缘点处($x=1$ m)沉降与解析解的相对误差,见图7(a)和7(b)。由图可见:①当无限求积单元的积分阶次较低时,其结果受极点位置的影响很大,随着积分阶次地提高,影响逐渐减小,当阶次提高到 5 时,影响已经很小;低阶插值的ABAQUS无限单元CINPE4对极点位置的依赖介于 2 阶和 3 阶无限求积单元之间。②随着无限求积单元阶次的提高,相对误差逐渐减小。③当 L 取 1 m左右,即极点取在坐标原点附近时,相对误差最小。

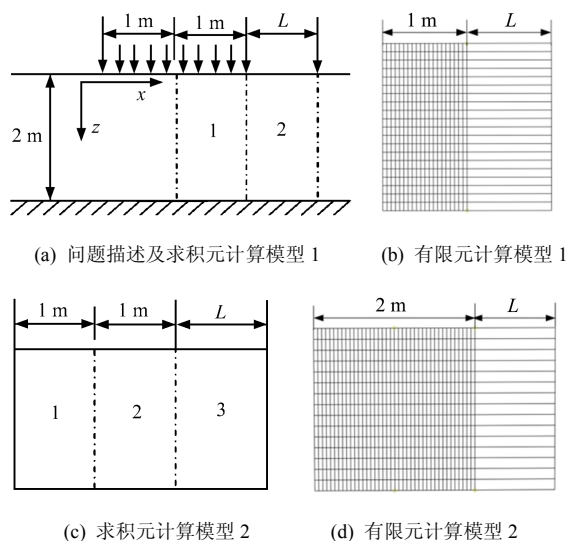


图6 无穷域静力分析

Fig.6 Elastostatic analyses in unbounded domain

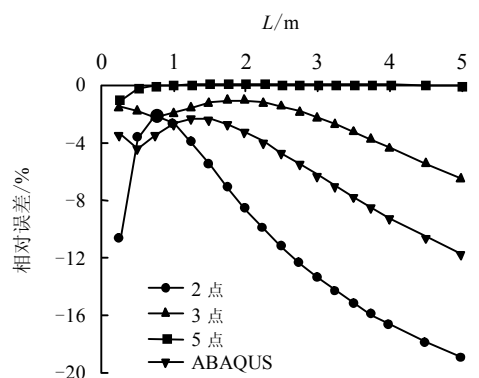
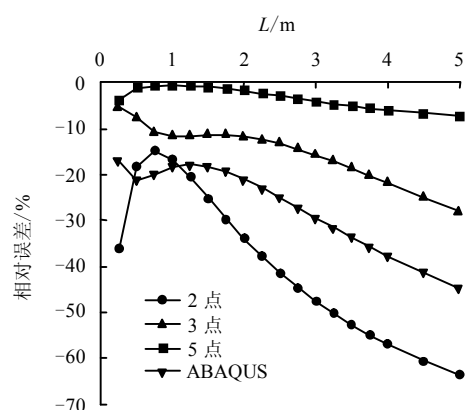
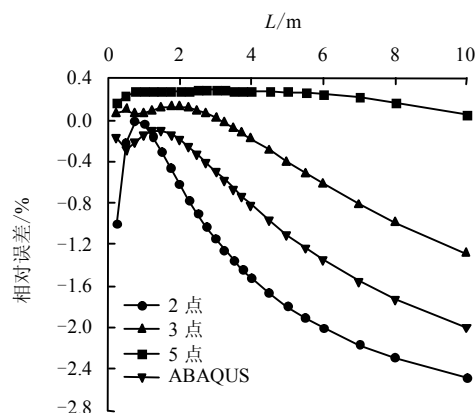
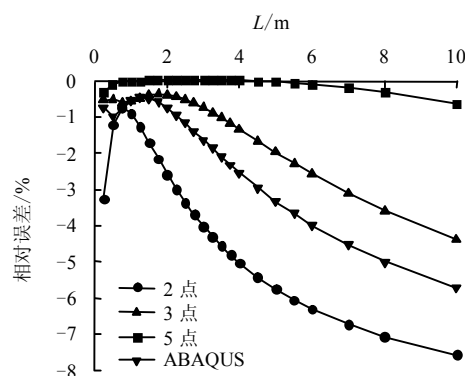
(a) $x=0$ m 处, 模型 1(b) $x=1$ m 处, 模型 1(c) $x=0$ m 处, 模型 2(d) $x=1$ m 处, 模型 2

图7 极点位置对沉降的影响

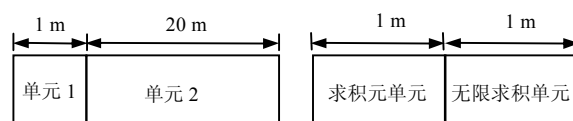
Fig.7 Influence of pole position of coordinate transformation on settlements

第2种模型中尝试通过扩大有限域的范围来减小结果对无限单元及无限求积单元的依赖,见图6(c)和6(d),其中有限域的水平方向长度增加为2 m,有限域划分为两个求积元单元,每个单元分为 5×5 个积分点,无限求积单元水平向长度为 L ,ABAQUS的模型也相应地进行修改。第2种模型得到沉降的相对误差见图7(c)和7(d),可以看到,随着模型有限域的扩大,结果的精度有所增加。

由以上两个算例可以得到如下结论:①低阶映射无限单元需要选择合适的极点,才能得到合理的结果,而无限求积单元可以通过积分阶次的提高来减小对极点位置的依赖,使用起来比较灵活,所受限小。②使用低阶无限单元时,可以通过扩大有限域的范围来提高精度,然而这就增加了计算规模,另外在模型的选择上也比较麻烦。③极点的最佳位置是问题的衰减中心,然而在实际问题中该中心是很难找到的。无限求积单元仅需要将感兴趣的范围划分为有限域,不需要修改几何模型及网格划分,仅通过增加积分点的数目来提高精度和减小对极点位置的依赖,有着低阶无限单元无法比拟的优势。

4.3 无穷域固结分析

本算例将无限求积单元用于饱和土固结分析,计算模型同上一算例,只是研究对象为饱和土,土骨架力学性质同上一算例。水力性质为:渗透系数 $k=10^{-8}$ m/s,动力黏度 $\mu=10$ Pa·s,无量纲时间参数 $T_v = Ekt/\mu H^2$,时间步长 $\Delta T_v^n = \alpha \Delta T_v^{n-1}$, $\alpha=1.1$, $\Delta T_v^0 = 0.005$ s, n 为增量步。分别用截断方法和求积元单元-无限求积单元两种方案求解,如图8所示,在截断方法中,右边界不透水。在求积元单元-无限求积单元方法中每个单元使用 5×5 个积分点,而截断方法中,第1个单元使用 5×5 个积分点,第2个单元竖向使用5个积分点,水平方向取不同积分点(见图9、10)。计算得到中心点处及 $x=1$ m处的沉降如图9、10所示,与文献[27]中得到的解析解对比,可以看到,两种方法都可以得到与解析解吻合的结果,而使用无限求积单元可以大量节省计算资源,并且在选择计算模型时也比较灵活。



(a) 截断法

(b) 求积元单元-无限求积单元法

图8 无穷域固结的两种计算方式

Fig.8 Two schemes for solution of unbounded domain consolidation

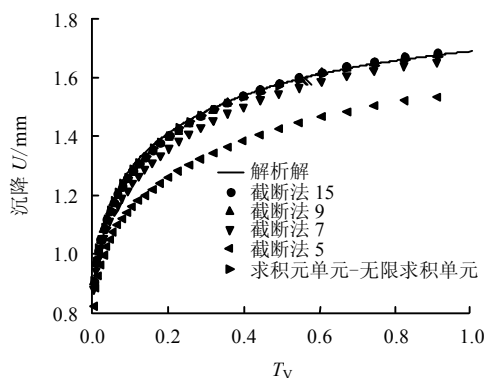
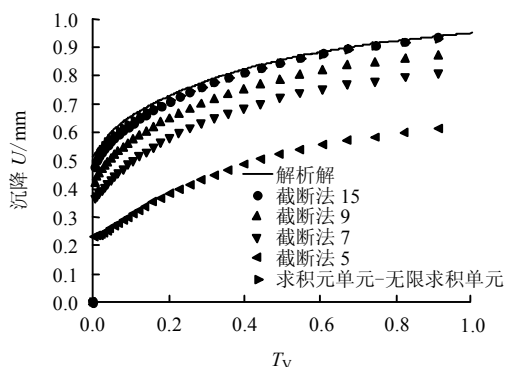


图9 中心线处沉降的比较

Fig.9 Comparison of settlements at the center

图10 $x=1\text{ m}$ 处沉降的比较Fig.10 Comparison of settlements at $x=1\text{ m}$

4.4 半平面静力分析

考虑一个平面应变静力问题,如图11所示,半平面弹性体受到三角形分布的条形载荷作用。该问题应力分布的解析解为^[28]

$$\sigma_x = \frac{P_0}{\pi} \left[(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{b} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{2z}{b} \ln \frac{R_1 R_2}{R^2} \right] \quad (20)$$

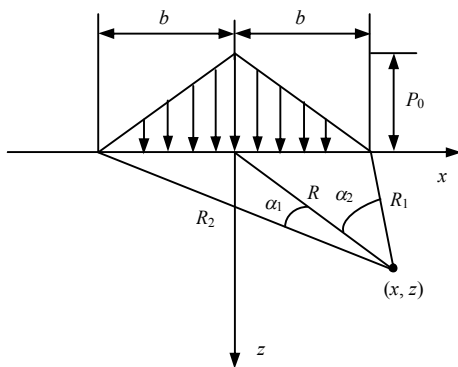
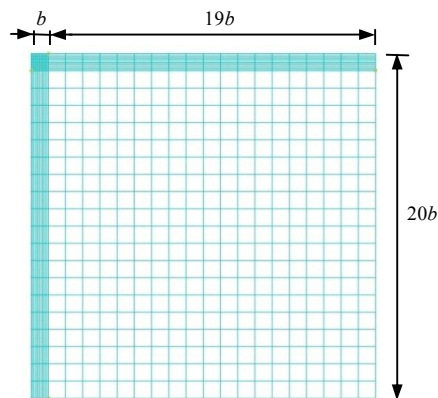


图11 半平面静力分析

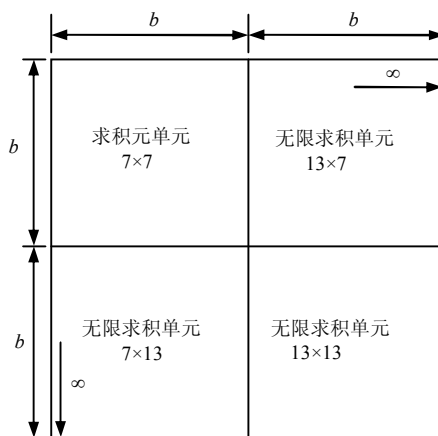
Fig.11 Elastostatic analysis of half plane

式中: P_0 为载荷的大小; $2b$ 为载荷分布宽度; α_1 、 α_2 、 x 、 z 、 R 、 R_1 、 R_2 等参数见图11。分别用截断

有限元和求积元单元-无限求积单元求解,网格划分如图12所示,其中积分点数标在单元中。两种方法得到的直线 $z=0.5b$, $0 \leq x \leq b$ 上水平方向上应力分布如图13所示。从图中可以看出,采用无限求积单元可以得到比截断有限元更高精度的结果,而且节省了大量的计算自由度。



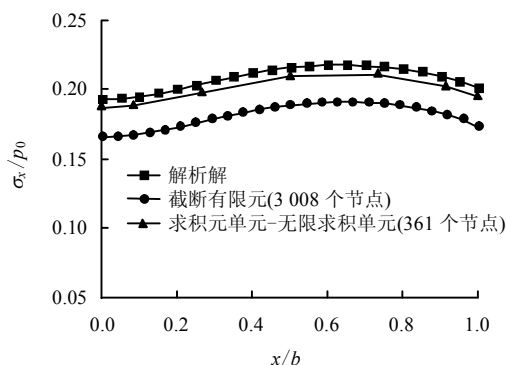
(a) 截断有限元网格



(b) 求积元单元-无限求积单元网格

图12 截断有限元网格和求积元单元-无限求积单元网格

Fig.12 Truncated finite element mesh and quadrature element-infinite quadrature element mesh

图13 $z=0.5b$ 处水平向应力分布Fig.13 Variation of horizontal stress at depth $z=0.5b$

4.5 三维静力分析

本例考虑受矩形均布荷载作用的半无限地基, 矩形面积为 $8\text{ m} \times 8\text{ m}$, 载荷大小为 10 kPa , 地基弹性模量 $E=50\text{ MPa}$, 泊松比为 $\nu=0.3$ 。取其 $1/4$ 进行分析, 如图 14 所示, 划分为一个求积元单元和 5 个无限求积元单元, 有限方向上取 5 个积分点, 无限方向上取 9 个积分点。计算得到载荷作用中心线上地面沉降见图 15, 并与解析解做了对比, 可以看到两者取得了一致的计算结果。

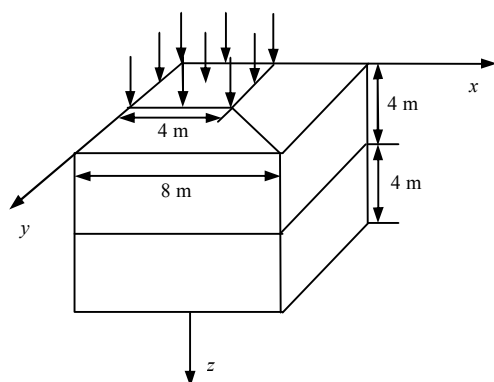


图 14 受均布载荷作用的三维地基计算模型

Fig.14 Three-dimensional foundation under uniformly distributed pressure

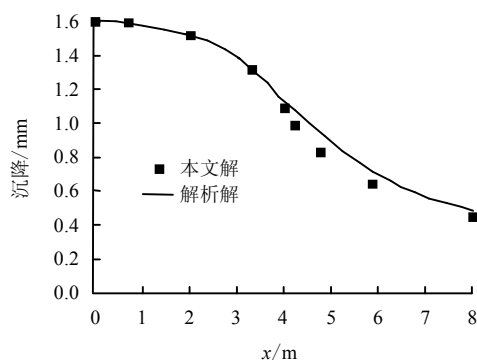
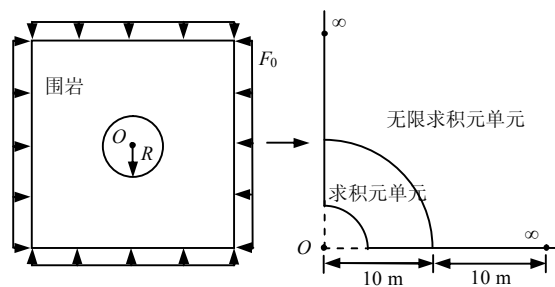


图 15 地表沉降分布

Fig.15 Variation of surface settlement

4.6 地下洞室开挖问题

如图 16 所示的某地下圆形洞室, 其半径 $R=3\text{ m}$, 围岩静水压力 $F_0=5\text{ MPa}$ 。围岩的弹性模量 $E=1\text{ GPa}$, 泊松比 $\nu=0.3$, 洞室的开挖载荷用 Mana 方法计算。取其 $1/4$ 进行分析, 划分为两个单元, 每个单元取 9×9 个积分点, 无限求积单元的极点取坐标原点。计算得到沿水平直径的径向应力和位移的分布如图 17 所示。可以看到, 求积元方法得到了与解析解非常一致的结果。

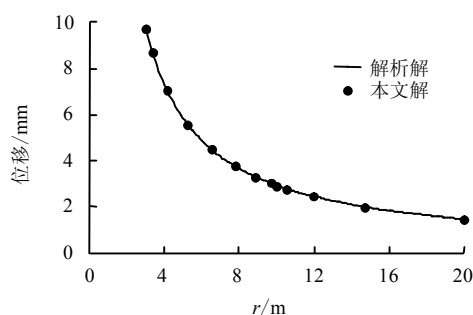


(a) 洞室开挖模型

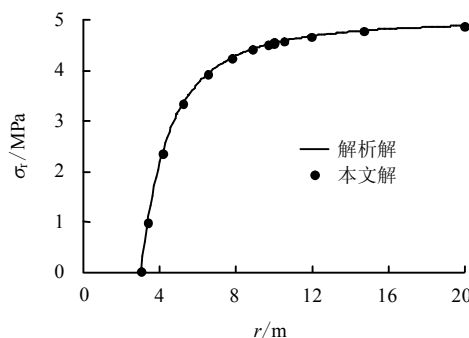
(b) 求积单元划分

图 16 洞室开挖模型及求积单元划分

Fig.16 Cavern excavation model and quadrature element mesh



(a) 径向位移



(b) 径向应力

图 17 空洞水平直径方向径向位移和径向应力的分布

Fig.17 Variation of radial displacement and radial stress along horizontal diameter

5 结 论

(1) 推导了基于坐标映射的无限求积单元计算公式, 并将其与求积元单元联合使用, 求解了无穷域上的瞬态渗流、固结和静力分析等数值算例, 并与解析解及截断方法做了比较, 结果符合较好。对无限求积单元与传统低阶无限单元进行了讨论, 主要得到以下结论: 传统无限单元的计算精度依赖于极点位置的选择, 而无限求积单元可以通过积分阶次的提高来减小对极点位置的依赖, 使用起来比较灵活。

(2) 极点的最佳位置是问题的衰减中心。

(3) 传统无限单元需要扩大有限域的范围来提高计算精度, 而无限求积单元仅需要将感兴趣的范围划分为有限域, 不需要修改几何模型及网格划分, 仅通过增加积分点的数目来提高精度, 有着传统低阶无限单元无法比拟的优势。

参考文献

- [1] UNGLESS R. An infinite element method[D]. Vancouver: University of British Columbia, 1973.
- [2] BETTESS P. Infinite elements[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1977, 11(1): 53—64.
- [3] LYNN P P, HADID H A. Infinite elements with $1/rn$ type decay[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1981, 17(3): 347—355.
- [4] NATH B. A novel finite element method for seepage analysis[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1981, 5(2): 139—163.
- [5] SIMONI L, SCHREFLER B A. Mapped infinite elements in soil consolidation[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1987, 24(3): 513—527.
- [6] HONJO Y, POKHAREL G. Parametric infinite element for seepage analysis[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1993, 17(1): 45—66.
- [7] ZHAO C, VALLIAPPAN S. Transient infinite elements for seepage problems in infinite media[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1993, 17(5): 323—341.
- [8] KOH K H, LEE S R. P-version static infinite element for representing $1/rn$ type decay problems in unbounded media[J]. **Computers and Geotechnics**, 1998, 22(1): 73—89.
- [9] ABDEL-FATTAH T T, HODHOD H A, AKL A Y. A novel formulation of infinite elements for static analysis[J]. **Computers and Structures**, 2000, 77(4): 371—379.
- [10] KUMAR P. Infinite elements for numerical analysis of underground excavations[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2000, 15(1): 117—124.
- [11] HOUMAT A. Mapped infinite p-element for two-dimensional problems of unbounded domains[J]. **Computers and Geotechnics**, 2008, 35(4): 608—615.
- [12] SMALL J C, LIU H L S. Time-settlement behaviour of piled raft foundations using infinite elements[J]. **Computers and Geotechnics**, 2008, 35(2): 187—195.
- [13] DONG W, SELVADURAI A P S. A combined finite and infinite element approach for modeling spherically symmetric transient subsurface flow[J]. **Computers and Geosciences**, 2009, 35(3): 438—445.
- [14] KAZAKOV K S. Elastodynamic infinite elements with united shape functions for soil-structure interaction[J]. **Finite Elements in Analysis and Design**, 2010, 46(10): 936—942.
- [15] NENNING M, SCHANZ M. Infinite elements in a poroelastodynamic FEM[C]//Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. [S. l.]: [s. n.], 2010, 10(1): 199—200.
- [16] WANG Q, BRILL D R. Improvements in the application of infinite elements to the NIKE3D program for airport pavement response analysis[J]. **International Journal of Pavement Engineering**, 2013, 14(5): 429—439.
- [17] DAVIES T, BU S. Infinite boundary elements for the analysis of halfspace problems[J]. **Computers and Geotechnics**, 1996, 19(2): 137—151.
- [18] BEER G, WATSON J. Infinite boundary elements[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1989, 28(6): 1233—1247.
- [19] 赵崇斌, 张楚汉, 张光斗. 用无穷元模拟半无限平面弹性地基[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1986, 26(3): 51—63.
- ZHAO Chong-bin, ZHANG Chu-han, ZHANG Guang-dou. Simulation of semi-infinite plane elastic foundation using infinite elements[J]. **Journal of Tsinghua University (Science and Technology)**, 1986, 26(3): 51—63.
- [20] 燕柳斌. 用三维映射无限元模拟重力坝地基[J]. 水利学报, 1991, (10): 7—12.
- YAN Liu-bin. Simulation of gravity dam foundation by using mapped infinite elements[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 1991, (10): 7—12.
- [21] 李晓龙, 王复明, 徐平. 自然元与无限元耦合方法在岩土工程粘弹性分析中的应用[J]. 振动与冲击, 2008, (12): 117—121.
- LI Xiao-long, WANG Fu-ming, XU Ping. Coupling method of natural and infinite element for visco-elastical analysis in geotechnical engineering[J]. **Journal of Vibration and Shock**, 2008, (12): 117—121.